Matemática 2

Licenciaturas em Economia, Gestão e Finanças

Data: 14 de Junho de 2017 **Duração:** 1H

Teste Final

Atenção: Esta prova deve ser entregue ao fim de 1 Hora. Deve justificar detalhadamente todas as suas respostas.

1. Considere a função $f(x,y) = x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x + 2y$

(a) Determine e classifique todos os pontos críticos de f. (20)

Solução:

Os pontos críticos de f são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 4 = 0 \\ -2x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Assim, o único ponto crítico de f é o ponto $(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$. Por outro lado temos que a matriz Hessiana de f é dada por

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(5/3, -1/3) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix},$$

sendo os seus menores principais $\Delta_1 = 2 > 0$ e $\Delta_2 = -12 < 0$. Assim, concluímos que $H(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$ é indefinida e que $(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$ é um **ponto de sela**.

(b) Sabendo que f tem um minimizante global no conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$, determine-o. (20)

Solução:

Como f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e a matriz Jacobiana do conjunto das restrições de igualdade é $J = [1 \quad 1]$, que tem característica máxima, sabemos que qualquer extremante local de f em M será ponto crítico da função Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda(x + y - 1)$. Ora, os pontos críticos de $\mathcal{L}$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 4 - \lambda = 0 \\ -2x - 4y + 2 - \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Como o minimizante que procuramos tem que ser ponto crítico da função lagrangiana e esta função admite como único ponto crítico o ponto $(2, -1)$ (com $\lambda = 2$), concluímos que é este o minimizante global de f em M, e que o mínimo global em M é $f(2, -1) = -4$.

Alternativamente, dado que em M se tem $y = 1 - x$, os valores da função f em M são obtidos como $f(x, 1-x) = x^2 - 2x(1-x) - 2(1-x)^2 - 4x + 2(1-x) = x(x-4), x \in \mathbb{R}$, que tem um mínimo absoluto em $x = 2$.

(c) Mostre que a função $g(x, y) = xy(f(x, y) - 2y + 4x)$ é homogénea e indique o seu grau de homogeneidade. (10)

Solução:

Comecemos por notar que $g(x, y) = yx^3 - 2x^2y^2 - 2xy^3$. Ora, como

$$g(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y)(\lambda x)^3 - 2(\lambda x)^2(\lambda y)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y)^3 = \lambda^4 g(x, y),$$

concluímos que a função g é homogénea de grau 4.

2. Considere $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq x,\ y \leq 2 - x^2\}$ e calcule $\displaystyle\iint_\Omega (xy - 1) dxdy$. (20)

Solução:

$$\begin{aligned} \iint_\Omega (xy-1)dxdy &= \int_0^1 \int_x^{2-x^2} (xy-1)dydx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} - y\right]_{y=x}^{y=2-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x(2-x^2)^2 - 2 + x^2 - \frac{x^3}{2} + x\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{12}(2-x^2)^3 - 2x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= (-\frac{1}{12} - 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}) - (-\frac{8}{12}) = -\frac{17}{24} \end{aligned}$$

3. Considere um modelo económico em que o nível de preço de um dado bem segue uma trajetória temporal, $P(t)$, determinada pela equação diferencial

$$P''(t) + aP'(t) + bP(t) = c, \qquad (1)$$

em que $a, c \geq 0$ e $b > 0$ são constantes obtidas a partir de certas hipóteses sobre o comportamento da oferta agregada e o modo de ajustamento de preços e de expetativas de inflação.

(a) Determine todas as funções constantes que são solução da equação (1) e estabeleça uma condição sobre os parâmetros a, b de modo que todas as soluções da equação sejam periódicas. (10)

Solução:

As soluções constantes da equação são da forma $P_*(t) = K$. Substituindo na equação diferencial, uma vez que $P_*''(t) = P_*'(t) = 0$ e $P_*(t) = K$, obtemos $bK = c \Leftrightarrow K = \frac{c}{b}$, pelo que a única solução constante da equação é dada por $P_*(t) = \frac{c}{b}$.

Usando o princípio de sobreposição, observamos que a solução geral da equação se pode escrever como $P(t) = \frac{c}{b} + P_h(t)$, em que $P_h(t)$ é a solução geral da equação homogénea. Ora, $P(t)$ será periódica se e só se $P_h(t)$ for periódica. Considerando as possíveis soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem, homogénea e com coeficientes constantes, vemos que $P_h(t)$ será periódica se e só se as raízes do polinómio característico $D^2 + aD + b$ forem números imaginários puros. Como

$$D^2 + aD + b = 0 \Leftrightarrow D = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

basta exigir que $a^2 - 4b < 0$ e que $a = 0$, o que se reduz a $a = 0$, já que por hipótese $b > 0$.

(b) Considere $a = 2, b = 5$ e $c = 10$ e determine a solução da equação (1) que verifica $P(0) = 1, P'(0) = 0$. O que pode dizer sobre o comportamento de longo prazo do nível de preço, tal como previsto por este modelo? (20)

Solução:

Como já foi referido na alínea anterior, a solução geral desta equação será da forma $P(t) = \frac{10}{5} + P_h(t)$, em que P_h é solução da equação homogénea $P_h'' + 2P_h' + 5P_h = 0$. As raízes do polinómio característico, $D^2 + 2D + 5$, são $D = -1 \pm 2i$, pelo que

$$\begin{aligned}
P(t) =& 2 + P_h(t) = 2 + e^{-t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)) \\
P'(t) =& -e^{-t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)) + e^{-t}(-2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t)) \\
=& e^{-t}((2c_2 - c_1)\cos(2t) - (2c_1 + c_2)\sin(2t))
\end{aligned}$$

Resta pois determinar c_1, c_2 a partir das condições iniciais.

$$P(0) = 1 \Leftrightarrow 2 + e^{-0}(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = -1,$$

$$P'(0) = 0 \Leftrightarrow e^{-0}((2c_2 + 1) - 0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Finalmente,

$$P(t) = 2 - e^{-t}\cos(2t) - \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t).$$

O nível de preço é oscilante, fruto do efeito dos termos $\cos(2t)$ e $\sin(2t)$, mas a multiplicação por e^{-t} faz com que este tenda rapidamente para 2. Podemos considerar que após um ajuste rápido, é atingido um preço de equilíbrio dado por $P_\infty = \lim_{t \to +\infty} P(t) = 2$.

LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Matemática 2

Licenciaturas em Economia, Gestão e Finanças

Data: 14 de Junho de 2017 **Duração:** 1H

Repetição do Teste Intercalar

Atenção: Deve justificar detalhadamente todas as suas respostas.

1. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule todos os valores próprios da matriz A e determine os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 0$. (15)

Solução:

O polinómio característico de A é $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda(5-\lambda)(\lambda - 13)$. Os valores próprios de A, são as raízes de $p(\lambda)$, isto é, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$ e $\lambda_3 = 13$. Os vetores próprios associados a $\lambda = 0$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo $Av = 0$

$$\begin{cases} 5v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 + 8v_2 + 6v_3 = 0 \\ 6v_2 + 5v_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -\frac{2}{5}v_2 \\ 0 = 0 \\ v_3 = -\frac{6}{5}v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 2v_2 \\ v_3 = -2v_2 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

isto é, os vetores da forma $t(-\frac{2}{5}, 1, -\frac{6}{5}), \quad t \neq 0$.

(b) Classifique a forma quadrática $Q(x, y, z)$ representada pela matriz A e identifique vetores $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ para os quais se tem $Q(a, b, c) = 0$. (10)

Solução:

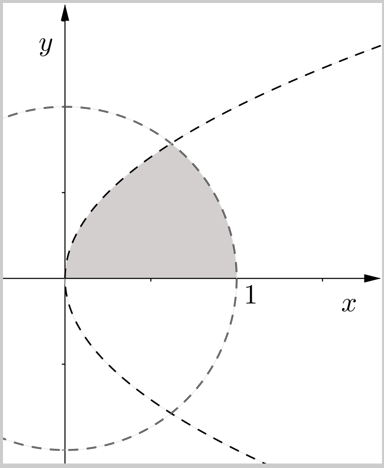
De acordo com a alínea anterior, os valores próprios da matriz A, que representa Q na base canónica de $\mathbb{R}^3$, são todos não negativos, sendo que $\lambda = 0$ é valor próprio. Isto permite concluir que a matriz A, bem como a forma quadrática Q, são semi-definidas positivas. Se considerarmos qualquer vetor $v \neq 0$ que seja vetor próprio associado a $\lambda = 0$ temos que $Q(v) = v^T Av = v^T(Av) = v^T \cdot 0 = 0$, pelo que qualquer vetor da forma $t(-\frac{2}{5}, 1, -\frac{6}{5}), t \neq 0$ verifica a condição pedida.

2. Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y}\ln(x - y^2)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

(a) Determine analiticamente D_f, o domínio da função f, e represente-o graficamente. Determine analiticamente o interior e a fronteira de D_f (20)

Solução:

$$\begin{aligned} D_f =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\, x - y^2 > 0,\, 1 - x^2 - y^2 > 0\} \\ =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\, x > y^2,\, x^2 + y^2 < 1\} \\ \mathrm{Int} D_f =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2,\, x^2 + y^2 < 1,\, y > 0\} \neq D_f \\ \mathrm{Fr} D_f =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \cup \\ &\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2, x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\} \cup \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\} \end{aligned}$$



(b) Decida, justificando, se o conjunto D_f é aberto, se é fechado e se é limitado. (10)

Solução:
O conjunto D_f não coincide com o seu interior, já que os pontos $(x,0), x \in]0,1[$ pertencem ao conjunto mas não ao seu interior. Assim, D_f não é um conjunto aberto. O conjunto também não é fechado, já que não coincide com a sua aderência. Por exemplo o ponto (0,0) pertence à fronteira, e por isso à aderência, mas não ao conjunto. Finalmente, como $D_f \subset B_1((0,0))$, D_f é um conjunto limitado.

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}.$$

(a) Mostre que f é contínua em $(1,0)$. (20)

Solução:

A função f é continua em $(1,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = f(1,0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0.$$

Como o ponto $(1,0)$ não se encontra no interior de nenhum dos ramos de definição de f, começamos por definir os conjuntos

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$
$$B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Como estes dois conjuntos são disjuntos, $B_1 \cup B_2 = D_f$ e o ponto $(1,0)$ é aderente a qualquer dos conjuntos, a função será contínua em $(1,0)$ se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in B_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in B_2}} f(x,y) = 0.$$

Ora, como $f(x,y) = 0$ em B_2 temos trivialmente que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in B_2}} f(x,y) = 0$.

Relativamente ao limite segundo o conjunto B_1, basta notar que

$$\left|\frac{(x-1)y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} - 0\right| = \frac{\sqrt{(x-1)^2}\cdot|y|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}\cdot|y|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$
$$\leq |y| \longrightarrow 0(\text{quando } (x,y)\to(1,0)),$$

para concluir que também se tem $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in B_1}} f(x,y) = 0$, o que permite por fim concluir que f é contínua no ponto $(1,0)$.

(b) Verifique que a função $g(x,y) = f(x,y)\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ é diferenciável no ponto $(0,0)$ e calcule $Dg(0,0)(\boldsymbol{h})$, em que $\boldsymbol{h} = (h_1,h_2)$. (15)

Solução:

Como $(0,0)$ é um ponto interior ao conjunto B_1 definido na resolução da alínea anterior, numa vizinhança de $(0,0)$ tem-se que $g(x,y) = (x-1)y$. Nessa vizinhança,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = x - 1.$$

Ora, uma vez que as derivadas parciais de g são funções polinomiais, e por isso contínuas, numa vizinhança de $(0,0)$, podemos concluir que g é diferenciável nesse ponto. As derivadas parciais no ponto $(0,0)$, de acordo com as expressões anteriores, são dadas por

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -1,$$

pelo que,

$$Dg(0,0)(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \cdot h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \cdot h_2 = -h_2.$$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $F(x,y) = xy + xf(y/x)$. Verifique que para $x \neq 0$ se tem (10)

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = xy + F.$$

Solução:

Como

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + f(y/x) - \frac{xy}{x^2} f'(y/x), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x + \frac{x}{x} f'(y/x),$$

tem-se

$$\begin{aligned} x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} =& x(y + f(y/x) - \frac{y}{x} f'(y/x)) + y(x + f'(y/x)) \\ =& xy + (xy + xf(y/x)) = xy + F \end{aligned}$$